ODR I. Cvičení 11

1. Nechť $y = y(t)$ je netriviální řešení rovnice $y'' + q(t)y = 0$, nechť $a > 0$ je pevné číslo, a I je interval. Dokažte, že
   (a) jestliže $q(t) \geq a$ pro $t \in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny nejvýše $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.
   (b) jestliže $q(t) \leq a$ pro $t \in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny alespoň $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.
2. Každé netriviální řešení rovnice $y'' + \frac{2}{t}y' + e^t y = 0$ má v $(0, +\infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních bodů se blíží k 0 pro $t \to +\infty$.
3. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' - ty' + y = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.
4. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + \frac{t}{2}y' + y \operatorname{arctg} t = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.
5. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + e^t y' + \frac{1}{2}e^t y = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše jeden nulový bod.
6. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + 2ty' + 4ty = 0$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše čtyři nulové body.
7. Uvažujme Besselovu rovnici $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, $x \in (0, +\infty)$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{R}$.
   (a) Pro $n \leq \frac{1}{2}$, sousední nulové body řešení jsou blíže než π.
   (b) Pro $n \geq \frac{1}{2}$, sousední nulové body (netriviálního) řešení jsou dále než π.
   (c) V každém okolí nekonečna má každé netriviální řešení nekonečně nulových bodů a vzdálenost sousedních se blíží k π pro $x \to \infty$.
8. Mějme diferenciální rovnici
$$x'' + q(t)x = 0 \tag{1}$$
   na intervalu $I = (K, +\infty), K > 0$.
   (a) Najděte všechna řešení rovnice $x''(t) + \frac{1}{ct^2}x(t) = 0$ na I, kde $c > 0$ je parametr. (Návod: hledejte x ve tvaru $x(t) = t^a$.)
   (b) Ukažte, že je-li $q(t) \leq \frac{1}{4t^2}$ na I, pak má každé netriviální řešení rovnice (1) nejvýše jeden nulový bod v I.
   (c) Ukažte, že je-li $q(t) \geq \frac{1}{ct^2}$ na I pro nějaké $c < 4$, pak má každé netriviální řešení rovnice (1) nekonečně mnoho nulových bodů v I.
9. Každé řešení rovnice $y'' + \frac{1}{1+\sqrt{t}}y = 0$ má v intervalu $(0, +\infty)$ nekonečně nulových bodů.
10. Každé řešení rovnice $y'' + \frac{1}{\sqrt{t}}y = 0$ má v intervalu $(0, +\infty)$ nekonečně nulových bodů.